13. Ecuaţii funcţionale în analiza matematică

Multe dintre ecuaţiile funcţionale care au fost studiate până în prezent, au apărut în mod natural, căutând funcţiile care verifică anumite proprietăţi dorite. În rezolvarea unei ecuaţii în care domeniul de definiţie şi codomeniul au şi structuri algebrice şi structuri topologice, metodele de algebră şi de analiză matematică se întrepătrund. Impunerea unor condiţii suplimentare asupra soluţiilor (derivabilitate, continuitate, monotonie) permite de multe ori determinarea tuturor soluţiilor dintr-o clasă de funcţii, soluţii care se caracterizează greu în caz general.

13.1. Ecuaţia lui Cauchy pe R

Ecuaţia funcţională considerată de Cauchy încă înainte de anul 1900, pe cât de naturală, s-a dovedit deosebit de dificilă, părând că soluţia "scapă printre degete". Determinarea soluţiilor discontinue (nebanale) ale acestei ecuaţii a dat de lucru multor matematicieni. Munca lor a contribuit la dezvoltarea sau consolidarea unor domenii diverse ale matematicii: spaţii vectoriale, baze Hamel, cardinale, densitate, teoria măsurii, structuri algebrice, morfisme. Proprietăţile surprinzătoare ale funcţiilor aditive discontinue, oferă o mulţime de exemple de funcţii "patologice", multe din ele contrazicând intuiţia şi demonstrând necesitatea raţionamentului algebric abstract.

Definiţia 13.1.1. Ecuaţia funcţională

$$(C):\begin{cases} f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ f(x+y)=f(x)+f(y); \quad x,y\in\mathbf{R}\end{cases}$$

se numeşte ecuaţia lui Cauchy iar soluţiile ei se numesc funcţii aditive.

Teorema 13.1.2. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcţie aditivă, atunci:

(a) $f(q)=qf(1)$, pentru orice $q\in\mathbf{Q}$

(b) $f(qx)=qf(x)$, pentru orice $q\in\mathbf{Q}$ şi $x\in\mathbf{R}$

(c) Funcţia $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-f(1)\cdot x$, $x\in\mathbf{R}$ este funcţie aditivă şi restricţia ei la $\mathbf{Q}$ este $g|_{\mathbf{Q}}=0$.

Demonstraţie. Din condiţia $f(x+y)=f(x)+f(y)$; $x,y\in\mathbf{R}$, prin inducţie rezultă $f(x_1+x_2+...+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$ şi în particular $f(nx)=nf(x)$; $n\in\mathbf{N}$

$$f(0)=0$$

$$f(-nx)+f(nx)=f(0)=0\text{, deci } f(-nx)=-nf(x).$$

Deci $f(kx) = kf(x)$; $k \in \mathbf{Z}$, $x \in \mathbf{R}$.

Avem: $f(x) = f\left(\frac{x}{n} + \ldots + \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right)$, deci $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x)$ şi $f\left(\frac{mx}{n}\right) = \frac{1}{n} f(mx) = \frac{m}{n} f(x)$; $m, n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$, deci $f(qx) = qf(x)$; $x \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{Q}$.

Pentru $x = 1$ obţinem $f(q) = qf(1)$, $q \in \mathbf{Q}$, deci punctele (a) şi (b) din teoremă sunt demonstrate.

(c) Din (a) $f(q) = qf(1)$; $q \in \mathbf{Q}$, deci $f(q) = f(q) - qf(1) = 0$. Avem $g(x+y) = f(x+y) - (x+y)f(1) = f(x) - xf(1) + f(y) - yf(1) = g(x) + g(y)$ $x, y \in \mathbf{R}$, deci g este aditivă.

Observaţia 13.1.3. • Din (a) rezultă că restricţia la $\mathbf{Q}$ a unei funcţii aditive este perfect determinată de valoarea $f(1)$. (Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii aditive cu proprietatea $f(1) = g(1)$ atunci $f|_{\mathbf{Q}} = g|_{\mathbf{Q}}$).

• Din punctul (c) rezultă că orice funcţie aditivă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este de forma $f(x) = g(x) + ax$, unde $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este funcţia aditivă şi $g|_{\mathbf{Q}} = 0$, deci clasa funcţiilor în care se caută soluţiile ecuaţiei lui Cauchy se poate restrânge la funcţiile ce au restricţia la $\mathbf{Q}$, funcţia nulă.

Teorema 13.1.4. Dacă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie aditivă şi $g|_{\mathbf{Q}} = 0$, atunci pentru orice interval nevid $(a,b) \subset \mathbf{R}$ avem:

a) Dacă g este mărginită pe (a,b), atunci g este mărginită pe $\mathbf{R}$.

b) $g((a,b)) = g(\mathbf{R})$.

c) Dacă g este mărginită pe (a,b), atunci $g = 0$.

d) Dacă $g \neq 0$, atunci mulţimea $g((a,b))$ este densă în $\mathbf{R}$.

Demonstraţie. Afirmaţia a) este o consecinţă a afirmaţiei b).

b) Fie $y_0 = g(x_0) \in \operatorname{Im} g = g(\mathbf{R})$ şi q un număr raţional din intervalul $(a - x_0, b - x_0)$. Atunci $x_0 + q \in (a,b)$ şi $g(x_0) + g(q) = g(x_0)$, deci $y_0 = g(x_0 + q) \in g((a,b))$.

c) Presupunem prin absurd că există $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel ca $g(x_0) \neq 0$. Din $g(nx_0) = ng(x_0)$, $n \in \mathbf{N}$ rezultă că mulţimea $\{g(nx_0) \mid n \in \mathbf{N}\}$ este nemărginită, deci $g(\mathbf{R})$ este nemărginită şi din punctul a) rezultă că g este nemărginită pe (a,b).

d) Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel ca $g(x_0) \neq 0$. Folosind punctul b) este suficient să arătăm că $\operatorname{Im} g = g(\mathbf{R})$ este densă în $\mathbf{R}$.

Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval de lungime $\varepsilon > 0$. Există $n \in \mathbf{N}$ astfel ca

$$\left|\frac{1}{n} g(x_0)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|g\left(\frac{1}{n} x_0\right)\right| < \varepsilon.$$

Mulţimea $\left\{kg\left(\frac{1}{n}x_0\right) \middle| k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{g\left(\frac{k}{n}x_0\right) \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}$ formează o diviziune echidistantă a axei reale, cu distanţa între două noduri consecutive mai mică decât ε, deci în orice interval de lungime mai mică decât ε, în particular în I, există un nod al diviziunii, deci există $k \in \mathbf{Z}$ astfel ca $g\left(\frac{k}{n}x_0\right) \in I$.

Observaţia 13.1.5. Dacă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie aditivă şi $g|_{\mathbf{Q}} = 0$, atunci $\operatorname{Im} g = \{0\}$ sau $\operatorname{Im} g$ este o mulţime densă în $\mathbf{R}$.

Teorema 13.1.6. Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie aditivă şi are una din următoarele proprietăţi:

a) f este mărginită pe un interval $(a,b) \subset \mathbf{R}$

b) f este local mărginită

c) f este monotonă

d) f este continuă

atunci $f(x) = f(1)x, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

Demonstraţie. a) Dacă f este mărginită pe (a,b), atunci funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - xf(1)$ este mărginită pe (a,b) şi din Teorema 1, punctul e), g este aditivă şi $g|_{\mathbf{Q}} = 0$.

Din teorema 2, punctul c) rezultă că $g = 0$, deci $f(x) = xf(1)$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Dacă f e local mărginită, atunci pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}$ există un interval $(a,b) \subset \mathbf{R}$ astfel ca $x_0 \in (a,b)$ şi g este mărginită pe (a,b), deci suntem în ipoteza a).

c) Dacă f este monotonă şi $a < b$, atunci

$$f((a,b)) \subset f([a,b]) = [A,B],$$

unde $A = \min\{f(a), f(b)\}$ şi $B = \max\{f(a), f(b)\}$, deci f este mărginită pe (a,b) şi suntem în ipoteza a).

d) O funcţie continuă transformă intervale închise în intervale închise.

Dacă $a < b$, atunci $f((a,b)) \subset f([a,b]) = [A,B]$, unde

$$A = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \text{ şi } B = \max\{df(x) \mid x \in [a,b]\},$$

deci $f((a,b))$ este mărginită şi suntem în ipoteza a).

Definiţia 13.1.7. O funcţie discontinuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică ecuaţiile Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbf{R}$ se numeşte funcţie Hamel.

Următoarea teoremă pune în evidență câteva proprietăți "patologice" ale tuturor funcțiilor Hamel.

Teorema 13.1.8. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcție Hamel și *a, b, c, d* sunt numere reale cu $a<b$, $c<d$, atunci:

(a) Mulțimea $f((a,b))$ este densă în **R**.

(b) Mulțimea $f^{-1}((c,d))$ este densă în **R**.

(c) Mulțimea $G_f\subset\mathbf{R}^2$ (graficul funcției *f*), este densă în $\mathbf{R}^2$.

Demonstrație. Fie funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-xf(1)$, $x\in\mathbf{R}$, care este aditivă și restricția $g|_{\mathbf{Q}}=0$. Deoarece *f* este discontinuă (funcție Hamel), există $x_0\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ astfel ca $g(x_0)=y_0\neq 0$. Mulțimile $\{qy_0\mid q\in\mathbf{Q}\}$ și $\{q'+qx_0\mid q\in\mathbf{Q}\}$ sunt dense în **R**, deci oricare ar fi intervalele $(c,d)\subset\mathbf{R}$ și $(a,b)\subset\mathbf{R}$, există $q\in\mathbf{Q}$ astfel ca $qy_0\in(c,d)$ și există $q'+qx_0\in(a,b)$.

Avem $g(q'+qx_0)=qy_0$, deci mulțimea $g((a,b))$ este densă în **R**.

(a) Dacă $f(1)=0$, atunci $f=g$, deci $f((a,b))=g((a,b))$ este densă.

Dacă $f(1)=k\neq 0$, atunci mulțimea $f((a,b))$ este densă, dacă și numai dacă mulțimea $\frac{1}{k}f((a,b))=\left(\frac{1}{k}f\right)((a,b))$ este densă, deci putem presupune $f(1)=1$.

Există un interval $(a_1,b_1)\subset(a,b)$ astfel ca $b_1-a_1<d-c\Leftrightarrow c-a_1<d-b_1$. Deoarece mulțimea $g((a_1,b_1))$ este densă, există $x_0\in(a_1,b_1)$ astfel ca $g(x_0)\in(c-a_1,d-b_1)$.

Avem $f(x_0)=g(x_0)+x_0\in(c-a_1+a_1,d-b_1+b_1)=(c,d)$.

(b) Din punctul (a), mulțimea $f((a,b))$ este densă în **R** pentru orice $a<b$, deci $f((a,b))\cap(c,d)\neq\varnothing\Leftrightarrow f^{-1}((c,d))\cap(a,b)\neq\varnothing$.

(c) Din (a) și (b) rezultă că pentru orice dreptunghi $(a,b)\times(c,d)\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, avem $f((a,b))\cap(c,d)\neq\varnothing$, deci $G_f\cap(a,b)\times(c,d)\neq\varnothing$.

Observația 13.1.9. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcție aditivă, $Kerf=\{x\in\mathbf{R}\mid f(x)=0\}$ este nucleul funcției *f*, $\operatorname{Im} f=\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}$ este imaginea funcției *f*, atunci:

(a) $Kerf=\{0\}$ sau $Kerf$ este densă în **R**.

(b) $\operatorname{Im} f=\{0\}$ sau $\operatorname{Im} f$ este densă în **R**.

(c) Dacă *f* este neinjectivă $\Leftrightarrow$ $Kerf$ este densă în **R**.

(d) Dacă f este neinjectivă, atunci toate mulţimile de nivel $N_y = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = y\}$, $y \in \operatorname{Im} f$, sunt dense în $\mathbf{R}$.

Observaţia 13.1.10. Pe submulţimi ale lui $\mathbf{R}$ se pot considera alte ecuaţii "de tip Cauchy" ca $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ sau $f(xy) = f(x)f(y)$, care prin substituţii adecvate se pot reduce la ecuaţia lui Cauchy.

Rezolvarea unor astfel de ecuaţii, în ipoteze mai tari, ca de exemplu derivabilitatea devine foarte uşoară.

În ecuaţia lui Cauchy, derivăm în raport cu y şi obţinem:

$$f'(x+y) = f'(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

Dacă facem $y = 0$ rezultă $f'(x) = f'(0) = c$ şi $f(x) = cx + d$, $x \in \mathbf{R}$.

Întorcându-ne în ecuaţie obţinem $d = 0$, deci soluţiile derivabile sunt $f(x) = cx$, $x \in \mathbf{R}$ unde $c \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

13.2. Ecuaţia lui Jensen

Interesul pentru ecuaţia funcţională a lui Jensen, parvine din studiul funcţiilor convexe, des folosite în teoria aproximării, funcţii definite prin inecuaţia lui Jensen.

Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval (mulţime convexă).

Definiţia 13.2.1. Ecuaţia funcţională

$$J : \begin{cases} f : I \to \mathbf{R} \\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}, \quad x, y \in I \end{cases}$$

se numeşte ecuaţia lui Jensen (pe intervalul I).

Observaţia 13.2.2. O funcţie $f : I \to \mathbf{R}$ care verifică inecuaţia lui Jensen: $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \le \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ se numeşte convexă (mai precis $\dfrac{1}{2}$ convexă, J convexă sau $\mathbf{Q}$ convexă).

Pentru rezolvarea ecuaţiei J sunt utile următoarele observaţii:

Observaţia 13.2.3. (a) Dacă f este soluţie a ecuaţiei J atunci pentru orice $c \in \mathbf{R}$, funcţia $f + c$ este de asemenea soluţie a ecuaţiei J, deci este suficient să căutăm doar soluţiile care într-un punct dat iau o valoare dată.

(b) Dacă $x_0 \in I$ verifică ecuaţia J pe I atunci funcţia $g : I_1 \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x + x_0)$, $x \in I_1$, verifică ecuaţia lui Jensen pe intervalul

$I_1 = I - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in I\}$. De aici rezultă că este suficient să rezolvăm ecuația lui Jensen pe intervale care conțin originea.

(c) Dacă $0 \in I$ și notăm cu $J_0 = \{f_0 : I \to \mathbf{R} \mid f$ verifică J și $f_0(0) = 0\}$ atunci mulțimea soluțiilor ecuației Jensen este

$$J = \{f_0 + c \mid f_0 \in J_0, c \in \mathbf{R}\}.$$

(d) Dacă $0 \in I$ și $f_0 \in J$ atunci pentru orice $x \in I$ și $n \in \mathbf{N}$ avem egalitatea:

$$f_0\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f_0(x)}{2^n}.$$

(Dacă în ecuația J punem $y = 0$ rezultă $f_0\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f_0(x)}{2}$ și prin inducție înlocuind pe x cu $\frac{x}{2^n}$ obținem: $f_0\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{f_0(x)}{2^{n+1}}$).

(e) Funcția $f : I \to \mathbf{R}$ este soluție a ecuației J pe intervalul I, dacă și numai dacă funcția $f_0 : I_1 \to \mathbf{R}$

$$f_0(x) = f(x + x_0) - f(x_0), \quad x \in I_1$$

este soluție a ecuației Jensen pe intervalul $I_1 = I - x_0$ și verifică relația $f_0(0) = 0$.

(f) Orice funcție aditivă verifică ecuația lui Jensen pe orice interval ($f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ deci $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$).

(g) Orice funcție de forma $f(x) = g(x) + c$, $x \in I$ cu $c \in \mathbf{R}$ o constantă arbitrară, verifică ecuația lui Jensen.

Vom vedea în continuare că singurele funcții care verifică ecuația J sunt cele de la (g).

Teorema 13.2.4. Dacă funcția $f_0 : (-a, a) \to \mathbf{R}$ verifică ecuația lui Jensen și $f_0(0) = 0$, atunci există o unică funcție aditivă $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel ca restricția $f_1|_{(-a,a)} = f_0$.

Demonstrație. Din observația 13.2.3.(d), avem: $f_0\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f_0(x)}{2}$ și f_0 fiind soluție a ecuației J

$f_0\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f_0(x)+f_0(y)}{2}$, deci $f_0(x+y)=f_0(x)+f_0(y)$, adică funcţia f_0 este aditivă pe intervalul $(-a,a)$.

Dacă f_1 este aditivă atunci $f_1(2^n x)=2^n f_1(x)$ pentru orice $n\in \mathbf{N}$ şi orice $x\in \mathbf{R}$. Luăm intervalele $D_n=(-2^n a, 2^n a)$, $n\in \mathbf{N}$ şi prelungim f_0 de la $(-a,a)$ la D_n prin relaţia $f_1(2^n x)=2^n f_0(x)$, unicul mod de prelungire ca f_1 să fie aditivă. Cum $\bigcup_{n\in \mathbf{N}} D_n=\mathbf{R}$, rezultă că obţinem funcţia f_1 ca unica funcţie aditivă a cărei restricţie la $(-a,a)$ este funcţia f_0.

Folosind teorema 13.2.4. şi observaţia 13.2.3.(e) obţinem:

Teorema 13.2.5. Funcţia $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ verifică ecuaţia

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

pentru orice $x,y\in[a,b]$, dacă şi numai dacă există o funcţie aditivă $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi o constantă reală $c\in\mathbf{R}$ astfel ca:

$$f(x)=g(x)+c,\quad x\in[a,b]$$

Corolarul 13.2.6. Funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ verifică ecuaţia lui Jensen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad x,y\in\mathbf{R}$$

dacă şi numai dacă funcţia $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)-f(0)$, $x\in\mathbf{R}$, verifică ecuaţia lui Cauchy

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\quad x,y\in\mathbf{R}$$

Corolarul 13.2.7. Singurele funcţii continue (monotone, local mărginite) $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ care verifică ecuaţia

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad x,y\in(a,b)$$

sunt funcţiile polinomiale $f(x)=cx+d$, $x\in(a,b)$ unde c şi d sunt constante reale arbitrare.

13.3. Ecuaţia lui D'Alembert

Ecuaţia funcţională

$$A:\begin{cases} f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\quad x,y\in\mathbf{R}\end{cases}$$

este cunoscută sub numele de ecuaţia cosinusului sau ecuaţia lui D'Alembert. Rezolvarea ei fără restricţii este complicată şi nu ne vom ocupa de ea aici. Ne propunem să determinăm doar funcţiile continue care verifică ecuaţia (A).

Dacă punem în ecuaţie $y=0$, rezultă $2f(x)=2f(x)f(0)$, din care, dacă f este neconstantă ($f\neq 0$ şi $f\neq 1$), rezultă $f(0)=1$.

Dacă punem $x=0$, rezultă $f(-y)=f(y)$, $y\in\mathbf{R}$, deci soluţiile sunt funcţii pare.

Dacă punem $x=ny$, rezultă

$$f((n+1)y)=2f(y)f(ny)-f((n-1)y) \tag{1}$$

Dacă în (1) punem $x=y$, rezultă $f(2x)+f(0)=2(f(x))^2$, în care dacă facem $t=2x$, obţinem:

$$\left(f\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2=\frac{f(t)+1}{2},\quad t\in\mathbf{R} \tag{2}$$

(ecuaţia verificată de funcţiile cos şi ch).

Deoarece $f(0)=1$, există un interval $[-a,a]$ astfel ca $f(x)>0$, pentru orice $x\in[-a,a]$.

În continuare diferenţiem două cazuri (inspirate de soluţiile cos şi ch).

Cazul 1. Dacă $0<f(a)\leq f(1)$, atunci există $c\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ astfel ca $f(a)=\cos c$. Din relaţia (2), prin inducţie se arată că:

$$f\left(\frac{a}{2^n}\right)=\cos\frac{c}{2^n},\quad x\in\mathbf{N}. \tag{3}$$

Din (3) folosind relaţia (1) se arată prin inducţie că:

$$f\left(\frac{k}{2^n}a\right)=\cos\left(\frac{k}{2^n}c\right),\quad \text{pentru orice } k,n\in\mathbf{N}.$$

Deoarece mulţimea $\left\{M=\frac{k}{2^n}a\mid k\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}\right\}$ este densă în $[0,\infty]$ şi f este continuă, rezultă:

$$f(x)=\cos bx,\quad x\in\mathbf{R}.$$

Cazul 2. Dacă $f(a)>1$, există $c>0$ astfel ca $f(a)=\operatorname{ch}c$. La fel ca în cazul 1, se arată că singura soluţie continuă este $f(x)=\operatorname{ch}bx$, $x\in\mathbf{R}$, de unde $b=\frac{c}{a}$.

În concluzie obţinem

Teorema 13.3.1. Funcţiile continue ce verifică ecuaţia lui D'Alembert sunt:

$$f = 0, \quad f(x) = \cos bx, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{şi} \quad f(x) = \operatorname{ch} bx, \quad x \in \mathbf{R},$$

unde $b \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

Observaţia 13.3.2. Determinarea soluţiilor în ipoteza că funcţiile f sunt de două ori derivabile este mult mai simplă.

Derivăm în ecuaţie în raport cu x, respectiv cu y de două ori şi obţinem relaţiile:

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

deci $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$ şi obţinem $f''(x) = af(x)$.

Dacă $a = -\omega^2$ rezultă $f(x) = b\cos\omega x + c\sin\omega x$.

Dacă $a = \omega^2$ rezultă $f(x) = b\operatorname{ch}\omega x + c\operatorname{sh}\omega x$.

Impunând acestor funcţii condiţiile $f(0) = 1$, $f(-x) = f(x)$ rezultă $f(x) = \cos\omega x$ sau $f(x) = \operatorname{ch}\omega x$, $x \in \mathbf{R}$.

13.4. Ecuaţia lui Pexider

În unele ecuaţii funcţionale, apar mai multe funcţii necunoscute, un tip de astfel de funcţii fiind ecuaţiile de tip Pexider.

Definiţia 13.4.1. Dacă $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii atunci ecuaţia funcţională:

$$(P): f(x+y) = g(x) + h(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

se numeşte ecuaţia lui Pexider cu funcţiile necunoscute f, g şi h.

Teorema 13.4.2. Funcţiile f, g şi h verifică ecuaţia lui Pexider (P) dacă şi numai dacă există o funcţie aditivă $f_0: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi constantele $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca:

$$f = f_0 + a + b, \quad g = f_0 + a, \quad h = f_0 + b.$$

Demonstraţie. Dacă f, g, h sunt de forma dată avem:

$$f(x+y) = f_0(x+y) + a + b = f_0(x) + f_0(y) + a + b =$$
$$= (f_0(x) + a) + (f_0(y) + b) = g(x) + h(y).$$

Reciproc. Dacă punem în (P) $y = 0$ rezultă: $f(x) = g(x) + h(0)$ şi notând $h(0) = b$ rezultă $g(x) = f(x) - b$.

Dacă punem în (P) $x = 0$ rezultă $f(y) = g(0) + h(y)$ şi notând $g(0) = a$ rezultă $h(y) = f(y) - g(0)$. Înlocuind g şi h în (P) obţinem:

$$f(x+y)=f(x)-b+f(y)-a, \quad x,y\in \mathbf{R}.$$

Dacă facem substituția $f(x)=f_0(x)+a+b$ obținem pentru noua funcție f_0 ecuația:

$$f_0(x+y)=f_0(x)+f_0(y), \quad x,y\in \mathbf{R}$$

deci f_0 este funcție aditivă şi atunci

$$f(x)=f_0(x)+a+b, \quad g(x)=f_0(x)+a, \quad h(x)=f_0(x)+b$$

pentru orice $x\in \mathbf{R}$.

Observația 13.4.3. Dacă funcțiile *f, g, h* verifică ecuația (*P*) şi una din ele este funcție continuă, atunci toate cele trei funcții sunt funcții continue.

Corolarul 13.4.4. Funcțiile continue *f, g, h* care verifică ecuația lui Pexider (*P*) sunt:

$$f(x)=cx+a+b, \quad g(x)=cx+a, \quad h(x)=cx+b$$

pentru orice $x\in \mathbf{R}$, unde *a, b, c* sunt constante reale arbitrare.

Bibliografie

1. J. Aczel, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, New York and London, 1966.
2. M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Univ. Slaski, Warszawa. 1985.
3. V. Pop, *Ecuații funcționale*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2002.